Desarrollo histórico de la teoría de integración de Lebesgue

En el surgimiento y desarrollo de la Teoría de la Medida, el problema central que se abordó no fue el de la medida de conjuntos en sí mismo, sino el de la integración de funciones. Tanto Lebesgue como quienes le siguieron buscaron resolver problemas que tenían que ver con la definición y las propiedades de la integral.

Después que Lebesgue formuló su definición de integral, él mismo y otros autores fueron aportando más ideas y resultados, los cuales iban conformando el cuerpo de una teoría para la cual también se iban encontrando aplicaciones.

Uno de los grandes promotores de la teoría de integración de Lebesgue fue Pierre Joseph Louis Fatou, quien en el año 1906 obtuvo su doctorado con una tesis titulada *Séries trigonométriques et séries de Taylor*, donde utilizó la teoría de Lebesgue para el estudio de la integral de Poisson de una función discontinua en la frontera de la región donde está definida y para tratar problemas relativos al desarrollo de una función en serie trigonométrica. En este trabajo demostró el resultado conocido ahora como Lema de Fatou. Además de aportar los resultados originales que se encuentran en su tesis, Fatou contribuyó de manera importante al desarrollo de la teoría de integración por la influencia que tuvo su trabajo en el mismo Lebesgue y sobre todo en F. Riesz, quien en un artículo de 1949, titulado *Lévolution de la notion d'integrale depuis Lebesgue* escribió:

"Si no me equivoco, es el libro de Lebesgue sobre las series trigonométricas, dentro de la Colección Borel, el que llamó mi atención sobre la noción de integral; después, para penetrar en los detalles, estudié también su Tesis y su libro sobre la integración. Sin embargo, la idea y el coraje para tratar de aplicar esta noción a los problemas de los que yo me ocupaba, me vinieron leyendo, en 1906, la excelente Memoria de Fatou, impresa en las Acta Mathematica y que el autor presentaba también como Tesis. Fue en particular un teorema muy simple, llamado generalmente lema de Fatou y que asegura, en el lenguaje actual, la semicontinuidad inferior de la operación funcional lineal que constituye la integración, el que me ayudó a demostrar, en febrero de 1907, algunas semanas después de la lectura de la Tesis, el teorema descubierto también, de manera independiente y simultáneamente, por Ernest Fischer y que se cita con el nombre de nosotros dos. El teorema sirvió, en primer lugar, de boleto permanente de ida y vuelta entre los dos espacios con una infinidad de dimensiones cuyo interés se liga con la teoría de las ecuaciones integrales, a saber, el espacio con una infinidad de coordenadas de Hilbert y el conjunto L^2 de las funciones medibles y de cuadrado integrable, dos espacios que, por cierto, actualmente se tratan, con Von Neumann, como dos realizaciones de una noción más general, a saber, el espacio abstracto de Hilbert. Fue quizás la primera aplicación de la teoría de Lebesgue, después, bien entendido, de las que fueron hechas por él mismo y por Fatou, la que atrajo el interés de los matemáticos y que daba luz sobre la importancia de su noción de integral."

Uno de los resultados más importantes de Lebesgue es el que se refiere a la segunda parte del título de su libro. Recordemos que el libro de Lebesgue de 1904 tiene como título *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives.*

El tema de la búsqueda de funciones primitivas lo abordó Lebesgue con el estudio de las integrales indefinidas:

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función medible e integrable, la función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida mediante la relación $F(x) = \int_a^x f(y)\, dy + K$, donde K es una constante, era llamada por Lebesgue una integral indefinida de f.

Lebesgue demostró que las integrales indefinidas tienen las siguientes tres propiedades:

1. Son funciones continuas.
2. Son de variación acotada.
3. Tienen como derivada a la función de la cual es una integral indefinida, excepto a lo más en los puntos de un conjunto de medida cero.

El estudio que hizo Lebesgue sobre este tema en su libro fue incompleto, se dieron más tarde resultados de otros autores que fueron completando el cuadro. Sin embargo, al final del libro Lebesgue introdujo una propiedad que sería clave para tratar el problema de la relación entre la integral y la derivada; propiedad que, además, llevaría a uno de los resultados más importantes de su teoría de integración, el cual, a su vez, sería una de las bases para el estudio de los procesos estocásticos.

Después de una serie de razonamientos, concluía Lebesgue:

"Queda así demostrado que toda función de variación acotada $f(x)$ tiene una derivada finita excepto para los valores de x de un conjunto de medida cero [resultado importante en sí mismo]. El razonamiento de la página 122, tal como acaba de ser completado, muestra también que esta derivada es integrable en el conjunto de puntos donde es finita, pero su función primitiva no necesariamente es $f(x)$, como lo muestra el ejemplo de la función $\xi(x)$ de la página 55. El teorema que acaba de ser demostrado es por consiguiente diferente del que concierne a la derivación de las integrales indefinidas; en otros términos, existen funciones continuas de variación acotada, $\xi(x)$ por ejemplo, que no son integrales indefinidas."

El ejemplo al que se refería Lebesgue es el siguiente:

Sea C el conjunto de Cantor, entonces cada $x \in C$ se puede expresar como una serie:

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \cdots$$

donde $a_k \in \{0, 2\}$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$.

Para cada $x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \cdots \in C$, definamos:

$$\xi(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots\right)$$

ξ es no decreciente ya que si $x, y \in C$ y $x < y$, entonces, si, en los desarrollos en base 3 de x y y, el m-simo es el primero que es distinto, ese término tiene que ser 0 para x y 2 para y; así que, si $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ son los $m-1$términos de los desarrollos de x y y, se tiene:

$\xi(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{2^{m-1}}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}$

$\xi(y) = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{2^{m-1}}\right) + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2}\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{b_k}{2^k}$

Por lo tanto:

$\xi(x) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{2^{m-1}}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{2}{2^k}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{2^{m-1}}\right) + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{2^{m-1}}\right) + \frac{1}{2^m}$

$\xi(y) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{2^{m-1}}\right) + \frac{1}{2^m} \geq \xi(x)$

Así que, las discontinuidades de ξ únicamente pueden ser de saltos; pero al ser ξ suprayectiva como función de C en el intervalo $[0, 1]$, no puede tener saltos. Por lo tanto, ξ es continua.

Para definir ξ en todo el intervalo $[0,1]$, falta definirla en los intervalos abiertos que se suprimen del intervalo $[0,1]$ para formar C.

Los desarrollos en base 3 de los extremos de un intervalo que se suprime en el n-simo paso coinciden hasta el término $n-1$, y el término siguiente del extremo izquierdo del intervalo es cero, mientras que el del extremo derecho es 2. Así que, si (c,d) es uno de los intervalos que se suprimen en el paso n, se tiene:

$$c = 0.a_1a_2\cdots a_{n-1}0222\cdots$$

$$d = 0.a_1a_2\cdots a_{n-1}2000\cdots$$

Así que:

$\xi\left(c\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2}{2^k}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}\right) + \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}\right) + \frac{1}{2^n}$

$\xi\left(d\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{2}{2^n}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2^{n-2}}\right) + \frac{1}{2^n}$

Por lo tanto, $\xi\left(c\right) = \xi\left(d\right)$.

Definamos $\xi\left(x\right) = \xi\left(c\right)$ para cualquier $x \in (c,d)$.

ξ es entonces una función continua y no decreciente, definida sobre el intervalo $[0,1]$ y con valores en el mismo intervalo. En particular, por ser no decreciente, es de variación acotada.

Intervalos que se conservan hasta el tercer paso, inclusive:

$\left[0, \frac{1}{3^3}\right]$, $\left[\frac{2}{3^3}, \frac{3}{3^3}\right]$, $\left[\frac{6}{3^3}, \frac{7}{3^3}\right]$, $\left[\frac{8}{3^3}, \frac{9}{3^3}\right]$,

$\left[\frac{18}{3^3}, \frac{19}{3^3}\right]$, $\left[\frac{20}{3^3}, \frac{21}{3^3}\right]$, $\left[\frac{24}{3^3}, \frac{25}{3^3}\right]$, $\left[\frac{26}{3^3}, \frac{27}{3^3}\right]$

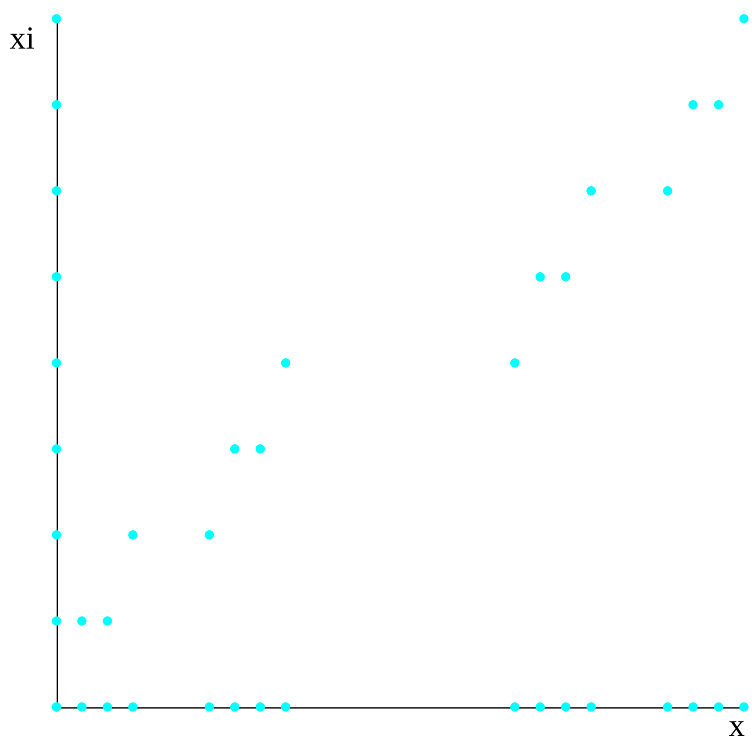
Escritos en base 3:

$[0, 0{,}00022\ldots]$, $[0{,}002, 0{,}00222\ldots]$, $[0{,}02, 0{,}02022\ldots]$, $[0{,}022, 0{,}02222\ldots]$,

$[0{,}2, 0{,}20022\ldots]$, $[0{,}202, 0{,}20222\ldots]$, $[0{,}22, 0{,}22022\ldots]$, $[0{,}222, 0{,}22222\ldots]$

$\xi(0)$	$\xi\left(\frac{1}{3^3}\right)$	$\xi\left(\frac{2}{3^3}\right)$	$\xi\left(\frac{3}{3^3}\right)$	$\xi\left(\frac{6}{3^3}\right)$	$\xi\left(\frac{7}{3^3}\right)$	$\xi\left(\frac{8}{3^3}\right)$	$\xi\left(\frac{9}{3^3}\right)$
0	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{3}{2^3}$	$\frac{3}{2^3}$	$\frac{1}{2}$

$\xi\left(\frac{18}{3^3}\right)$	$\xi\left(\frac{19}{3^3}\right)$	$\xi\left(\frac{20}{3^3}\right)$	$\xi\left(\frac{21}{3^3}\right)$	$\xi\left(\frac{24}{3^3}\right)$	$\xi\left(\frac{25}{3^3}\right)$	$\xi\left(\frac{26}{3^3}\right)$	$\xi(1)$
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2^3}$	$\frac{5}{2^3}$	$\frac{3}{2^2}$	$\frac{3}{2^2}$	$\frac{7}{2^3}$	$\frac{7}{2^3}$	1



Intervalos que se eliminan hasta el cuarto paso, inclusive:

En el primer paso se elimina el intervalo $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ y se tiene:

$\xi\left[\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right] = \frac{1}{2}$

En el segundo paso se eliminan los intervalos $\left(\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}\right)$ y $\left(\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2}\right)$, y se tiene:

$\xi\left[\left(\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}\right)\right] = \frac{1}{2^2}$

$\xi\left[\left(\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2}\right)\right] = \frac{3}{2^2}$

En el tercer paso se eliminan los intervalos $\left(\frac{1}{3^3}, \frac{2}{3^3}\right)$, $\left(\frac{7}{3^3}, \frac{8}{3^3}\right)$, $\left(\frac{19}{3^3}, \frac{20}{3^3}\right)$ y $\left(\frac{25}{3^3}, \frac{26}{3^3}\right)$, y se tiene:

$\xi\left[\left(\frac{1}{3^3}, \frac{2}{3^3}\right)\right] = \frac{1}{2^3}$

$\xi\left[\left(\frac{7}{3^3}, \frac{8}{3^3}\right)\right] = \frac{3}{2^3}$

$\xi\left[\left(\frac{19}{3^3}, \frac{20}{3^3}\right)\right] = \frac{5}{2^3}$

$\xi\left[\left(\frac{25}{3^3}, \frac{26}{3^3}\right)\right] = \frac{7}{2^3}$

En el cuarto paso se eliminan 8 intervalos, los cuales, bajo la función ξ, toman los valores $\frac{1}{2^4}$, $\frac{3}{2^4}$ $\frac{5}{2^4}$, $\frac{7}{2^4}$, $\frac{9}{2^4}$, $\frac{11}{2^4}$, $\frac{13}{2^4}$ y $\frac{15}{2^4}$, respectivamente.

Vemos entonces que, bajo la función ξ, cada intervalo que se elimina toma como valor el punto medio del valor que toman los dos intervalos contiguos que se eliminan

$\left(\frac{1}{3^4}, \frac{2}{3^4}\right) \mapsto \frac{1}{2^4}$

$\left(\frac{7}{3^4}, \frac{8}{3^4}\right) \mapsto \frac{3}{2^4}$

$\left(\frac{19}{3^4}, \frac{20}{3^4}\right) \mapsto \frac{5}{2^4}$

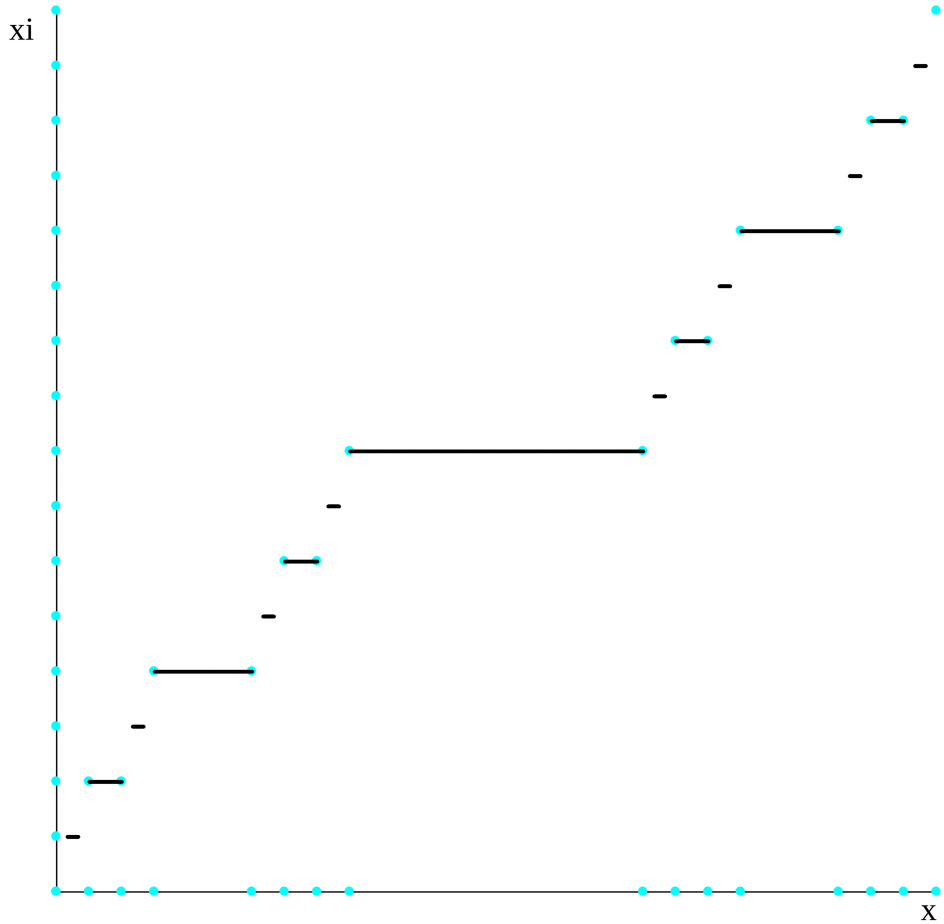
$\left(\frac{25}{3^4}, \frac{26}{3^4}\right) \mapsto \frac{7}{2^4}$

$\left(\frac{55}{3^4}, \frac{56}{3^4}\right) \mapsto \frac{9}{2^4}$

$\left(\frac{61}{3^4}, \frac{62}{3^4}\right) \mapsto \frac{11}{2^4}$

$\left(\frac{73}{3^4}, \frac{74}{3^4}\right) \mapsto \frac{13}{2^4}$

$\left(\frac{79}{3^4}, \frac{80}{3^4}\right) \mapsto \frac{15}{2^4}$



Sean $(c_1, d_1), (c_2, d_2), \ldots$ los intervalos que se suprimen para formar el conjunto de Cantor, entonces:

$$[0,1] = C \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (c_k, d_k)\right)$$

Supongamos que ξ es una integral indefinida de una función medible e integrable $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, entonces existe una constante $K \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\xi(x) = \int_0^x f(y)\, dy + K$$

para cualquier $x \in [0,1]$.

ξ es derivable y su derivada es cero en cualquier punto del conjunto $D = \bigcup_{k=1}^{\infty} (c_k, d_k)$, el cual tiene medida 1.

Por otra parte, al ser ξ una integral indefinida de f, su derivada es f, excepto a lo más en los puntos de un conjunto de medida cero.

Sean:

$A = \{x \in (0,1) : \xi'(x) \text{ existe y } \xi'(x) \neq f(x)\}$

$B = \{x \in (0,1) : \xi'(x) \text{ no existe o } (\xi'(x) \text{ existe y } \xi'(x) = f(x))\}$

A tiene entonces medida cero y B, que es el complemento de A en el intervalo $(0,1)$, tiene medida 1.

Por lo tanto, $B \cap D$ tiene medida 1. Además:

$$B \cap D = \{x \in D : \xi'(x) = f(x)\}$$

Así que $f(x) = 0$ para cualquier $x \in B \cap D$.

Por lo tanto $f = 0$ excepto a lo más en un conjunto de medida cero.

Se tiene entonces:

$\int_0^x f(y)\,dy = 0$ para cualquier $x \in [0,1]$.

ξ tendría entonces que ser constante, pero no lo es, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, ξ no es una integral indefinida.

Al final de su libro, Lebesgue agregó una nota después de que afirma que existen funciones continuas de variación acotada que no son integrales indefinidas. Lo que afirma, sin demostración, en esa nota es de una importancia central para el desarrollo de un tema que conduciría al teorema de Radon-Nykodim.

La nota de Lebesgue dice:

"Para que una función sea integral indefinida, se requiere además que su variación total en una infinidad numerable de intervalos de longitud total ℓ, tienda hacia cero con ℓ."

En otras palabras, para que $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ sea una integral indefinida se requiere que, si $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), \ldots$ son intervalos contenidos en $[a,b]$, ajenos por parejas, entonces:

$$\lim_{\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) \to 0} \sum_{k=1}^{\infty} |F(b_k) - F(a_k)| = 0$$

Es decir, dada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$ para cualquier sucesión de intervalos ajenos por parejas $((a_k, b_k))_{k \in \mathbb{N}}$ contenidos en $[a,b]$ y tales que $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) < \delta$.

Esta propiedad es equivalente a la siguiente:

Dada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$ para cualquier colección finita de intervalos (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_n, b_n), contenidos en $[a, b]$, ajenos por parejas y tales que $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$.

En efecto, supongamos que se tiene la primera propiedad y, dada $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta \in (0, b-a)$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$ para cualquier sucesión de intervalos ajenos $([a_k, b_k])_{k\in\mathbb{N}}$ contenidos en $[a, b]$ y tales que $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < \delta$. Entonces, dada cualquier colección finita de intervalos (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_n, b_n), contenidos en $[a, b]$, ajenos por parejas y tales que $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$, podemos agregar a esa familia una colección infinita numerables de intervalos $(a_{n+1}, bn+_1)$, (a_{n+2}, b_{n+2}), ..., contenidos en $[a, b]$, ajenos por parejas, sin puntos en común con los primeros n intervalos y tales que $\sum_{k=n+1}^{\infty} (b_k - a_k) < \delta - \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$; así que $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < \delta$ y entonces:

$$\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$$

Inversamente, supongamos que se tiene la segunda propiedad y, dada $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta > 0$ tal que $\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ para cualquier colección finita de intervalos (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_n, b_n), contenidos en $[a, b]$, ajenos por parejas y tales que $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$. Consideremos una sucesión de intervalos ajenos por parejas $((a_k, b_k))_{k\in\mathbb{N}}$ contenidos en $[a, b]$ y tales que $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < \delta$; entonces, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, los intervalos (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_n, b_n) están contenidos en $[a, b]$, son ajenos por parejas y $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$; por lo tanto, $\sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Así que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |F(b_k) - F(a_k)| = \text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} \sum_{k=1}^{n} |F(b_k) - F(a_k)| \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$$

La segunda propiedad es la definición moderna de una función absolutamente continua. Así que, lo que afirmó Lebesgue es que, para que una función de variación acotada sea una integral indefinida se requiere que sea absolutamente continua. Agregó, en la misma nota, también sin demostración, que esta condición no únicamente es necesaria para que una función sea una integral indefinida, sino que también es suficiente.

En 1905, Giuseppe Vitali publicó una demostración de la afirmación de Lebesgue en un artículo titulado *Sulle funzioni integrali*, extendiendo el resultado al caso multidimensional. Fue Vitali quien dio el nombre de continuidad absoluta a la propiedad enunciada por Lebesgue. Más tarde, en 1907, Lebesgue publicó su propia demostración en un artículo titulado *Sur la recherche des fonctions primitives par l'intégration*.

En resumen, los resultados de Lebesgue y Vitali, para el caso unidimensional, son los siguientes:

1. Una función es una integral indefinida si y sólo si es absolutamente continua.
2. Toda integral indefinida es de variación acotada.
3. Si $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una integral indefinida de la función f, entonces existe un conjunto A de medida cero tal que $F'(x)$ existe para cualquier $x \notin A$ y $F'(x) = f(x)$.

4. No toda función de variación acotada continua es una integral indefinida. Existen funciones de variación acotadas continuas, no constantes, cuya derivada es cero excepto a lo más en un conjunto de medida de Lebesgue cero, así que tales funciones no son integrales indefinidas.

En 1910 Lebesgue publicó un artículo, titulado *L'intégration des fonctions discontinues*, donde profundizó el estudio de las integrales indefinidas. En ese artículo analizó las integrales definidas para el caso multidimensional, planteando un nuevo enfoque (al parecer, influenciado por un trabajo de Vitali, de 1907-1908, sobre el mismo tema), el cual sería retomado por Johann Radon, en el año 1913, en un artículo que, como ya lo mencionamos, sentó las bases para desarrollar una teoría general de la medida.

En ese mismo artículo de 1910, Lebesgue demostró el ahora conocido como el teorema de la convergencia dominada, el cual afirma que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles tales $\lim_{n\rightsquigarrow\infty} f_n$ existe excepto a lo más en un conjunto de medida cero, y $|f_n| \leq g$, donde g es una función medible cuya integral es finita, entonces:

$$\int \lim_{n\rightsquigarrow\infty} f_n(y)\,dy = \lim_{n\to\infty} \int f_n(y)\,dy$$

El cambio de enfoque de Lebesgue para tratar el tema de las integrales definidas consistió en considerarlas como funciones definidas sobre los conjuntos medibles. Especificamente, consideró una integral indefinida como una función F que asigna a cada conjunto medible E la integral $\int_E f\,(P)\,dP$, donde f es una función medible e integrable y P representa un elemento de $\mathbb{R}^n$. Demostró entonces que una función así definida tiene las siguientes dos propiedades:

1. Si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos medibles tales que $\lim_{n\rightsquigarrow\infty} m(E_n) = 0$, donde m es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, entonces $\lim_{n\rightsquigarrow\infty} F(E_n) = 0$.
2. Si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos medibles, ajenos por parejas, entonces:

$$F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F(E_n)$$

En el artículo de Lebesgue, una función que satisface la propiedad 2 es llamada aditiva.

En 1913, Johann Radon dio un nuevo paso importante alrededor de este problema al plantearlo de una manera más general. Radon retomó el concepto de función aditiva definida sobre una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, el cual había sido definido por Lebesgue en su artículo de 1910, pero el problema de las integrales definidas lo planteó como un problema de la relación entre dos funcionales aditivas de acuerdo con la siguiente definición:

Sean b y f dos funcionales aditivas definidas las familias de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, T_b y T_f, respectivamente. Se dice que f es de base b si b es no negativa y si, para cualquier conjunto $E \in T_b \cap T_f$, la relación $b(E) = 0$ implica que $f(E) = 0$.

Bajo una condición adicional mostró que si f es de base b, entonces $T_f \subset T_b$ y demostró el siguiente resultado:

Si la funcional aditiva f es de base b, entonces existe una función Ψ, integrable con respecto a b, tal que $f(E) = \int_E \Psi db$ para cualquier conjunto $E \in T_f$.

Otton Nikodym, en su artículo de 1930, retomó el trabajo de Radon y obtuvo un resultado general, ahora conocido como el teorema de Radon-Nikodym.

Las investigaciones alrededor de este problema culminaron con un artículo de Otto Nikodym, publicado en 1930 con el título *Sur une généralisation des intégrales de M. J. Radon*, en el cual demostró el ahora llamado teorema de Radon-Nikodym, resultado que permitió definir de manera general un concepto de importancia central en la teoría de los procesos estocásticos, el de Esperanza Condicional.

Nikodym hacía referencia en su artículo a la formulación general que hizo Fréchet de la teoría de la medida de Lebesgue, pero modificó un poco la terminología. Consideraba una familia no vacía $\mathcal{H}$ de subconjuntos de un conjunto H, la cual es cerrada bajo uniones numerables y complementos (en particular H pertenece a la familia); es decir, lo que ahora se denomina σ-álgebra de subconjuntos de H. Una medida μ la definió entonces como una función (con valores reales), no negativa, definida sobre $\mathcal{H}$, la cual es "perfectamente aditiva", es decir, si $E_1, E_2, \ldots$ son elementos de la familia, ajenos por parejas, entonces $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} En\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(En)$; es decir, μ es σ-aditiva, en la terminología moderna. En otras palabras, Nikodym trabajaba con medidas tal como se las define actualmente.

Dada una medida μ sobre $\mathcal{H}$, definió la μ-distancia entre dos elementos E y F de $\mathcal{H}$ de la siguiente manera:

$$||E, F||_{\mu} = \mu(E - F) + \mu(F - E)$$

Si ν es una función con valores reales definida sobre $\mathcal{H}$, llamaba a ν μ-continua si para cualquier sucesión $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{H}$ tales que:

$$\text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} ||E_n, E||_{\mu} = 0$$

donde $E \in \mathcal{H}$, se tiene $\text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} \nu(E_n) = \nu(E)$.

Después de que desarrolló la teoría de integración con respecto a una medida μ, demostró el resultado central de su artículo:

Si ν es perfectamente aditiva, entonces las 4 condiciones siguientes son equivalentes:

1. ν es μ-continua.
2. Para cualquier conjunto $E \in \mathcal{H}$, si $\nu(E) \neq 0$ entonces $\mu(E) > 0$.
3. Si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{H}$ tales que $\text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} \mu(E_n) = 0$, entonces $\text{lím}_{n\rightsquigarrow\infty} \nu(E_n) = 0$.

4. Existe una función μ-integrable $f : H \to \mathbb{R}$ tal que $\nu(E) = \int_E f d\mu$, para cualquier conjunto $E \in \mathcal{H}$.

Con este trabajo de Nikodym quedó formulada la teoría de la medida como se le conoce actualmente y quedaron establecidos los resultados básicos de la teoría de integración con respecto a una medida.

Es necesario mencionar que previamente al trabajo de Nikodym, la solución al problema de la integración de funciones, visto como uno de Análisis Funcional, había sido ya formulada de manera completa por Percy John Daniell en sus 4 artículos publicados entre 1918 y 1920.

En su primer artículo, *A general form of the integral*, publicado en 1918, decía Daniell: "La idea de una integral ha sido extendida por Radon (1913), Young (1914), Riesz (1914) y otros a la integración con respecto a una función de variación acotada. Estas teorías están basadas sobre las propiedades fundamentales de los conjuntos de puntos en un espacio con un número finito de dimensiones. En este artículo se desarrolla una teoría que es independiente de la naturaleza de sus elementos. Pueden ser puntos en un espacio de una infinidad numerable de dimensiones, o curvas en general, o clases de eventos que conciernen a la teoría. Se sigue que, aunque muchas de las demostraciones que se dan [en este artículo] son meras traducciones a otro lenguaje de métodos ya clásicos (particularmente los debidos a Young), aquí y ahí, donde las demostraciones previas se basan en la teoría de conjuntos de puntos, nuevos métodos han sido desarrollados."Mencionaba también que Fréchet consideró una integral general, pero decía que no trató completamente los teoremas de existencia.

Para definir la integral, asumía que hay una clase inicial T_0 de funciones acotadas con valores reales, definidas sobre un conjunto H, la cual tiene las siguientes propiedades:

1. Si $f \in T_0$ y c es una constante, entonces $cf \in T_0$.

2. Si $f_1, f_2 \in T_0$, entonces $f_1 + f_2$, $\max(f_1, f_2)$ y $\min(f_1, f_2)$ pertenecen a T_0.

Consideraba entonces funciones U definidas sobre T_0 (las denominaba funcionales), las cuales pueden tener algunas de las siguientes propiedades:

(A) $U(f_1 + f_2) = U(f_1) + U(f_2)$.

(C) $U(cf) = cU(f)$, donde c es una constante.

(L) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de funciones tales que $\lim_{n\rightsquigarrow\infty} f_n(p) = 0$ para cualquier p, entonces $\lim_{n\to\infty} U(f_n) = 0$.

(M) Existe una funcional M, definida sobre las funciones no negativas de T_0, tal que si $\varphi \leq \Psi$, entonces $M(\varphi) \leq M(\Psi)$, y $|U(f)| \leq M(|f|)$.

(P) Si f es no negativa, entonces $U(f) \geq 0$.

Denominaba I-integral a una funcional I que satisfaga (A), (C), (L) y (P) y S-integral a una funcional que satisfaga (A), (C), (L) y (M). Mencionaba que una I-integral puede ser llamada una integral positiva y que una S-integral es una integral de Stieltjes generalizada.

Como ejemplo mencionaba que si T_0 es el conjunto de funciones continuas definidas sobre un intervalo (a, b), entonces la integral de Riemann es una I-integral y la integral de Stieltjes es una S-integral.

Definió la clase T_1 como la familia de funciones que son límite de una sucesión no decreciente $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de T_0.

Si $f \in T_1$ y $f = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} f_n$, define $I(f) = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} I(f_n)$. Si $I(f) < \infty$ se dirá que f es sumable.

Si f es cualquier función con valores reales, definida sobre H, se define:

$$\overline{I}(f) = \inf\{I(\varphi) \in T_1 : \varphi \in T_1 \text{ y } \varphi \geq f\}$$

$$\underline{I}(f) = -\overline{I}(-f).$$

Si $\overline{I}(f) = \underline{I}(f) < \infty$ se dirá que f es sumable y se define $I(f) = \overline{I}(f)$.

Si S es una S- integral, demostró que las funcionales $I_2 = I_1 - S$ e $I = I_1 + I_2$ son I-integrales y se dice que una función f con valores reales, definida sobre H, es sumable (S) si es I-sumable. En este caso, se define $S(f) = I_1(f) - I_2(f)$.

Demostró entonces los siguientes resultados:

1. I, definida sobre T_1, es una I-integral.
2. Si f es el límite de una sucesión no decreciente $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de T_1, entonces $f \in T_1$ e $I(f) = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} I(f_n)$.
3. I, definida sobre el conjunto de funciones sumables, es una I-integral.
4. Si f es el límite de una sucesión no decreciente $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones sumables y:
   $\lim_{n\to\infty} I(f_n) < \infty$,
   entonces f es sumable e $I(f) = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} I(f_n)$.
5. Si f es el límite de una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones sumables y existe una función sumable φ tal que $|f_n| \leq \varphi$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, entonces f es sumable e $I(f) = \lim_{n\to\infty} I(f_n)$.
6. S, definida sobre el conjunto de funciones (S) sumables, es una S-integral.
7. Si f es el límite de una sucesión no decreciente $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones (S) sumables y $\lim_{n\rightsquigarrow\infty} (I_1 + I_2)(f_n) < \infty$, entonces f es (S) sumable y $S(f) = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} S(f_n)$.
8. Si f es el límite de una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones (S) sumables y existe una función (S) sumable φ tal que $|f_n| \leq \varphi$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, entonces f es (S) sumable y $S(f) = \lim_{n\rightsquigarrow\infty} S(f_n)$.

Como puede verse, Daniell realizó un proceso de extensión de una funcional lineal, definida sobre un conjunto de funciones T_0, a una funcional lineal definida sobre un conjunto de funciones que es cerrado bajo el paso a límites y la funcional extendida es tal que, bajo determinadas condiciones, la funcional de un límite de funciones es igual al límite de la sucesión formada por la aplicación de la funcional a cada una de las funciones.

Es lo mismo que había realizado Lebesgue, pero el resultado de Daniell no se restringe a funciones definidas sobre $\mathbb{R}^n$; incluye el caso en que las funciones a integrar estén definidas sobre un espacio de dimensión infinita. El teorema de Carathéodory permitió hacer lo mismo siguiendo el enfoque de Lebesgue, basando la definición de la integral en la existencia de una medida. De hecho, el resultado de Carathéodory permite realizar también un proceso de extensión, pero no de una funcional, sino de una función definida sobre conjuntos, para así llegar a la construcción de una medida. La aplicación del teorema de Carathéodory a la construcción de medidas en espacios de dimension infinita tardó algunos años, básicamente se dio con el resultado de Kolmogorov del año 1933.

En el año 1920, Daniell publicó su segundo artículo sobre el tema de la integral, bajo el título *Integrals in an infinity number of dimensions*. En ese trabajo dio algunos ejemplos de integrales de funciones definidas sobre espacios de dimensión infinita. En el mismo año publicó otros dos artículos, uno titulado *Functions of limited variation in an infinite number of dimensions* y el otro *Further properties of the general integral*, en los cuales continuó desarrollando su teoría de integración.

El trabajo de Daniell tuvo una gran influencia, siendo su principal aplicación la que hizo Norbert Wiener, entre 1921 y 1923 al construir un modelo matemático para el movimiento browniano, no basándose en la teoría de la medida que se estaba desarrollando, sino utilizando el teorema de extensión de Daniell. Algunos años más tarde, al completarse el desarrollo de la teoría de la medida y de la teoría de integración con respecto a una medida, el método de Daniell fue reemplazado por el de Carathéodory. Sin embargo, no está dicha la última palabra; recientemente se ha retomado el método de Daniell, en particular en el Cálculo Estocástico.